

Sorozatok határértéke

KONVERGENS SOROZATOK TULAJDONSÁGAI, NEVEZETES SOROZATOK
HATÁRÉRTÉKE

Konvergens sorozatok tulajdonságai:

- ▶ Határérték unicitása (egyértelműsége):
 - ▶ **Tétel:** Konvergens sorozatnak csak egy határértéke lehet.
- ▶ Konvergenca kapcsolata a korlátossággal és a monotonitással:
 - ▶ **1. Tétel:** Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.
 - ▶ **2. Állítás:** Ha egy sorozat korlátos, akkor nem biztos, hogy konvergens.
 - ▶ Pl: $\{(-1)^n\}$
 - ▶ Megjegyzés: A korlátosság szükséges, de nem elégséges feltétele a konvergenciának.

Konvergens sorozatok tulajdonságai 2.

- ▶ Konvergenca kapcsolata a korlátossággal és a monotonitással (folytatás):
 - ▶ **3. Tétel:** Ha egy sorozat korlátos és monoton, akkor konvergens.
 - ▶ Monoton növekvő sorozat határértéke a felső határa, monoton csökkenő sorozat határértéke pedig a sorozat alsó határa.
 - ▶ **4. Állítás:** Ha egy sorozat konvergens, akkor nem biztos, hogy korlátos és monoton.
 - ▶ Pl.: $\left\{3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$
 - ▶ Megjegyzés: A korlátosság és monotonitás elégséges, de nem szükséges feltétele a konvergenciának.
 - ▶ A 3. tétel *egzisztencia tétel*: a határérték létezését biztosítja, a pontos értéket nem adja meg.

Konvergens sorozatok tulajdonságai 3.

▶ Rendőr-elv:

- ▶ **Tétel:** Ha $a_n \rightarrow A$, és $b_n \rightarrow A$, és majdnem minden n -re $a_n \leq c_n \leq b_n$ teljesül, akkor $c_n \rightarrow A$.

▶ Határérték művelettartása:

- ▶ **Tétel:** Ha az $\{a_n\}$ sorozat konvergens és $a_n \rightarrow A$, valamint a $\{b_n\}$ sorozat konvergens és $b_n \rightarrow B$, akkor

- 1) $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot A$, bármely c valós szám esetén,
- 2) $a_n \pm b_n \rightarrow A \pm B$
- 3) $a_n \cdot b_n \rightarrow A \cdot B$
- 4) $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}$, amennyiben $b_n \neq 0$ és $B \neq 0$.

Nevezetes sorozatok határértékei:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \text{minden határon túl nő} & q > 1 \\ \text{nincs határérték} & q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Valódi divergens sorozatok:

- ▶ Azokat a sorozatokat, amelyeknek van határértéke, konvergens sorozatoknak nevezzük.
- ▶ Azokat a sorozatokat, amelyeknek nincs határértéke, divergens sorozatoknak nevezzük.
- ▶ **Definíció:** Az $\{a_n\}$ sorozatnak határértéke ∞ , ha bármely K valós számhoz van olyan N természetes szám, hogy $n > N$ esetén akkor $a_n > K$ teljesül.
- ▶ **Definíció:** Az $\{a_n\}$ sorozatnak határértéke $-\infty$, ha bármely k valós számhoz van olyan N természetes szám, hogy $n > N$ esetén akkor $a_n < k$ teljesül.
- ▶ **Jelölés:** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$.
- ▶ Azokat a sorozatokat, amelyeknek határértéke $\pm\infty$, valódi divergens sorozatoknak nevezzük.

Versenyfeladatok:

1. Hányféleképpen írhatjuk be az ábrán látható négyzetekbe az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számokat úgy, hogy a szomszédos négyzetekbe írt számok különbsége ne legyen 3? (Szomszédosnak tekintünk két négyzetet, ha van közös oldaluk.)
2. Egy 5x5-ös táblázat minden sorába és minden oszlopába pontosan egyszer beírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat. A táblázatba beírt számok a táblázat egyik átlójára szimmetrikusan helyezkednek el. A feltételeknek megfelelő kitöltés esetén mennyi lehet a táblázat szimmetriaátlójában levő számok összege?
3. Tegyük egy hagyományos óra minden számjegyére egy-egy korongot, tehát az 1-re egy darabot, a 2-re is egy darabot, és így tovább, végül a 12-re is egy darabot. Ezután egy lépés a következőt jelenti: megfogunk két tetszőleges korongot, és az egyiket az óramutató járásával ellentétes irányban, a másikat az óramutató járásával azonos irányban a szomszédjára áttesszük. Elérhetjük-e véges sok ilyen lépéssel, hogy mind a 12 korong ugyanazon a számjegyén legyen?

